L3, Alg	Classification des groupes d'ordre pq	L 103 L 104 L 108 L 121 L 101

Th : Soit G un groupe d'ordre pq, avec $p, q \in \mathbb{P}$, $p < q$.

Si $q \not\equiv 1\ [p]$ (ie $p \nmid q-1$) alors $G \simeq \mathbb{Z}/_{pq}\mathbb{Z}$

Si $q \equiv 1\ [p]$ (ie $p \mid q-1$) alors $G \simeq \mathbb{Z}/_{pq}\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$

où $\alpha : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_q\mathbb{Z})$ est la seule action non triviale

---

Démonstration : D'après le 1^{er} th de Sylow,

G admet un p-Sylow H et un q-Sylow N.

De plus, d'après le $3^{ème}$ th de Sylow, on a les relations :

$$\begin{cases} n_p \equiv 1 & [p] \\ n_p \mid q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n_q \equiv 1 & [q] \\ n_q \mid p \end{cases}$$

Ainsi, $n_q \in \{1, p\}$ et $q \mid n_q - 1$ d'où $n_q = 1$. Ainsi, $N \lhd G$.

Comme $N \cap H < N$ et $N \cap H < H$, on a par le th de Lagrange,

$|N \cap H|$ divise p et q or $p \wedge q = 1$ donc $|N \cap H| = 1$ puis $N \cap H = \{e\}$

Comme N est distingué, $NH < G$,

et d'après le 2^{nd} th d'isomorphisme, $NH/_N \simeq H/_{N \cap H}$

En passant aux cardinaux : $|NH| \times 1 = |N| \times |H| = pq = |G|$

d'où $NH = G$.

Ainsi, par le critère du produit semi-direct,

on a $G \simeq N \rtimes_{\tilde\alpha} H$ avec $\tilde\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ morphisme

Or $|H| = p$ et $|N| = q$ donc $H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $N \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

puis $\mathrm{Aut}(N) \simeq (\mathbb{Z}/_q\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/_{(q-1)}\mathbb{Z}$ car $q \in \mathbb{P}$.

D'où $G \simeq \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/_q\mathbb{Z}$ avec $\alpha : \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{(q-1)}\mathbb{Z}$.

<u>1^{er} cas :</u> α est le morphisme trivial,

alors le produit est direct : $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$

d'après le th des restes chinois.

Ce cas peut se produire pour toute valeur de q.

<u>2^{nd} cas :</u> α n'est pas le morphisme trivial.

Comme $\operatorname{Ker}(\alpha) \triangleleft \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $\operatorname{Ker}\alpha = \{\bar{0}\}$ car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple.

Ainsi, α est injectif.

Son image est un s/s groupe de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ de cardinal p.

En particulier, on doit avoir $p \mid q-1$, ie $q \equiv 1 \; [p]$.

Dans ce cas, pour tout p diviseur de $q-1$, il existe un unique sous groupe de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ de cardinal p. On le note Γ.

Le morphisme α est déterminé de façon unique par le choix d'un générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\alpha(1)$.

Or il y a à priori $q-2$ choix possible pour $\alpha(1)$.

Mq 2 choix distincts de $\alpha(1)$ donnent 2 produits semi-directs isomorphes.

Soient $\alpha, \beta : H \to \operatorname{Aut}(N)$.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\alpha"] & \Gamma \\ & H \arrow[u, hook, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

ainsi, $\exists\, \phi \in \operatorname{Aut}(H)$ tq $\alpha = \beta \circ \phi$

On considère $f : \begin{array}{rcl} N \rtimes_\alpha H & \to & N \rtimes_\beta H \\ (n,h) & \mapsto & (n, \phi(h)) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} N \rtimes_\beta H & \to & N \rtimes_\alpha H \\ (n,h) & \mapsto & (n, \phi^{-1}(h)) \end{array}$

On montre facilement que f et g sont 2 morphismes inverses l'un de l'autre.

Ainsi $N \rtimes_\alpha H \simeq N \rtimes_\beta H$